



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALA
17 FEBRUARIE 2024

SUBIECT CLASA A X-A

Subiectul 1.

Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Să se arate că:

$$\log_a b \cdot \log_{ab} b + \log_b c \cdot \log_{bc} c + \log_c a \cdot \log_{ca} a \geq \frac{3}{2}$$

Subiectul 2.

Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ și funcțiile bijective $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$f((f \circ f)(x) \cdot f(x)) = m \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}^*.$$

Subiectul 3.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

a) Dacă $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \neq -1$, să se arate că $\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3} \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, să se arate că $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

Subiectul 4.

Fie triunghiul ABC cu $A(z_1)$, $B(z_2)$ și $C(z_3)$, unde numerele complexe z_1, z_2 și z_3 sunt nenule și verifică $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1 - z_2| = |z_3|$. Să se arate că aria triunghiului ABC este $\frac{3}{2}|z_1 z_2|$ iar $\cos C \geq \frac{4}{5}$.

(Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2023)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



SOLUȚII ȘI BAREM CLASA A X-A

Subiectul 1.

Avem $\log_{ab} b = \frac{1}{\log_b(ab)} = \frac{1}{1+\log_b a} = \frac{\log_a b}{1+\log_a b}$ și analoagele.

Inegalitatea devine: $\frac{(\log_a b)^2}{1+\log_a b} + \frac{(\log_b c)^2}{1+\log_b c} + \frac{(\log_c a)^2}{1+\log_c a} \geq \frac{3}{2}$ 1p

Notăm $\log_a b = x, \log_b c = y, \log_c a = z \Rightarrow x, y, z \in (0, \infty)$ și $xyz = 1$ 1p

Arătăm că $\frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z} \geq \frac{3}{2}$.

Din inegalitatea Bergstrom $\Rightarrow \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3+x+y+z}$ 2p

Fie $S = x + y + z$. Din inegalitatea mediilor, obținem că $S \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ 2p

Avem $\frac{S^2}{3+S} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2S^2 \geq 3S + 9 \Leftrightarrow (S-3)(2S+3) \geq 0$ ceea ce este adevărat1p

Subiectul 2.

Deoarece f bijectivă, obținem că $(f \circ f)(x) \cdot f(x) = f^{-1}(m)$ 1p

Înlocuind x cu $f(x)$ obținem $(f \circ f \circ f)(x) \cdot (f \circ f)(x) = f^{-1}(m)$ 1p

Deci $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ și cum f este injectivă obținem $(f \circ f)(x) = x$ 2p

Deci $x \cdot f(x) = f^{-1}(m)$ adică $f(x) = \frac{f^{-1}(m)}{x}$ 1p

Pentru $x = 1$ obținem $f(1) = f^{-1}(m)$ adică $(f \circ f)(1) = m$ deci $m = 1$ 1p

În concluzie $f(x) = \frac{a}{x}$ unde $a = f(1)$ 1p

Subiectul 3.

a) Din $z \cdot \bar{z} = |z|$ avem $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 1p

Deci $\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3} \right) = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3}$ 1p

În concluzie $\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3} \in \mathbb{R}$ 1p

b) $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)$ 1p

Deci $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right)$ 1p

Adică $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3)$ 1p

De unde $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$ 1p

Subiectul 4.

Fie G centrul de greutate al triunghiului $ABC \Rightarrow z_G = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = 0 \Rightarrow G(0)$ 1p

Deoarece $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1 - z_2| = |z_3| \Rightarrow |z_1 - z_2| = |z_1 + z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \Rightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} \in i \cdot \mathbb{R} \Rightarrow z_1 = aiz_2$, unde $a \in \mathbb{R}^*$ 1p

$\frac{z_1}{z_2} \in i \cdot \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_G}{z_2 - z_G} \in i \cdot \mathbb{R} \Leftrightarrow AG \perp BG \Rightarrow$ triunghiul AGB este dreptunghic în G 1p

Avem $A_{\Delta ABC} = 3 \cdot A_{\Delta GAB} = 3 \cdot \frac{AG \cdot BG}{2} = \frac{3}{2} |z_1 - z_G| \cdot |z_2 - z_G| = \frac{3}{2} |z_1 z_2|$ 1p

Considerăm unghiul ACB pozitiv orientat $\Rightarrow \angle ACB = \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$

și $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \left| \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right| (\cos C + i \sin C) \Rightarrow \left| \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right| \cos C = \operatorname{Re} \left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right)$ 1p

Avem: $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{z_1 + 2z_2}{2z_1 + z_2} = \frac{aiz_2 + 2z_2}{2aiz_2 + z_2} = \frac{2+ai}{1+2ai} \Rightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) = \frac{2+2a^2}{1+4a^2}$ și $\left| \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right| = \sqrt{\frac{4+a^2}{1+4a^2}}$

Deci, $\cos C = \frac{2+2a^2}{\sqrt{(4+a^2)(1+4a^2)}}$ 1p

Arătăm că $\frac{2+2a^2}{\sqrt{(4+a^2)(1+4a^2)}} \geq \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(1+a^2) \geq 2\sqrt{(4+a^2)(1+4a^2)}$ ceea ce rezultă din inegalitatea mediilor pentru numerele pozitive $4+a^2$ și $1+4a^2$1p

Obs. Dacă unghiul ACB este negativ orientat $\Rightarrow \angle ACB = 2\pi - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ și

$\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \left| \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right| (\cos C - i \sin C) \Rightarrow \left| \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right| \cos C = \operatorname{Re} \left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right)$ indiferent de orientarea $\angle ACB$.